

MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Plan

A. FORMULAIRE

1. CINÉMATIQUE DU POINT MATÉRIEL
2. DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL
3. TRAVAIL, ÉNERGIE
4. RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS

5. SYSTÈMES DE POINTS

6. INTERACTIONS NEWTONIENNES

B. COMPLÉMENTS

1. RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE
2. LE PENDULE DE FOUCAULT
3. LES RÉFÉRENTIELS EN ASTRONOMIE



A. Formulaire

1 Cinématique du point matériel

1.1 Systèmes de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes : (x, y, z)

Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$ Volume élémentaire : $d\tau = dx dy dz$

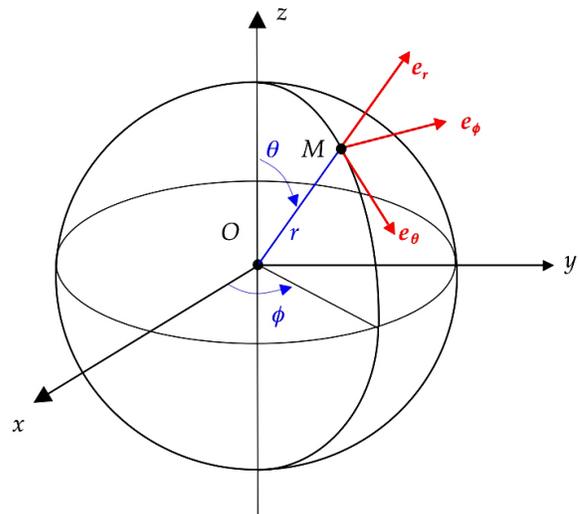
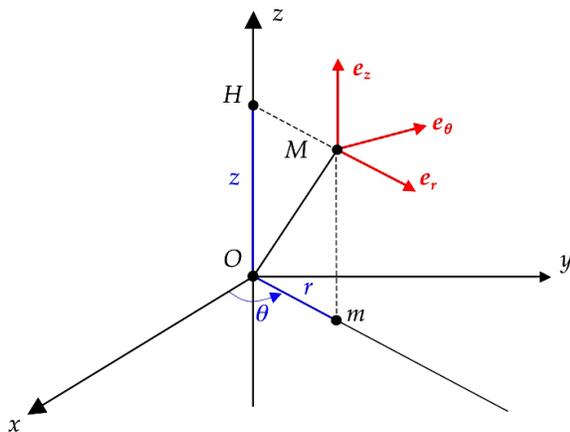


FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques (à gauche) et sphériques (à droite)

- Coordonnées cylindriques : (r, θ, z)

Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$ Volume élémentaire : $d\tau = r dr d\theta dz$

On a : $\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = \vec{e}_\theta \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\vec{e}_r \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$

- Coordonnées sphériques : (r, θ, ϕ) [Attention! r et θ ne sont pas les mêmes qu'en cylindriques]

Déplacement élémentaire : $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\phi \vec{e}_\phi$ Volume élémentaire : $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

1.2 Vitesse et accélération

- Coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$ $\vec{a} = \ddot{x} \vec{e}_x + \ddot{y} \vec{e}_y + \ddot{z} \vec{e}_z$
- Coordonnées cylindriques : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$ $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$

Cas d'une rotation uniforme : $\vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -r \omega^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$

- Coordonnées sphériques : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \sin \theta \dot{\phi} \vec{e}_\phi$

1.3 Mouvement à accélération (ou force) centrale de centre O

- Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ est une constante du mouvement car $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{a} = \vec{0}$. La trajectoire est donc plane et il existe une constante C appelée "constante des aires" telle que $C = r^2 \dot{\theta}$ en coordonnées polaires dans ce plan.

- La vitesse aréolaire est constante : $dS/dt = C/2$

- Première formule de Binet : $v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right]$
- Seconde formule de Binet : $\vec{a} = -C^2 u^2 \left[u + \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} \right) \right] \vec{e}_r$

2 Dynamique du point matériel

2.1 Principes et théorèmes

La Dynamique du point matériel repose sur trois principes non démontrables (appelés aussi "lois de Newton") qui sont la base de tout le développement de la mécanique classique :

- Principe d'inertie : il existe une classe de référentiels privilégiés, appelés "référentiels galiléens", dans lesquels un point matériel isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.
- Principe Fondamental de la Dynamique : dans un référentiel galiléen,

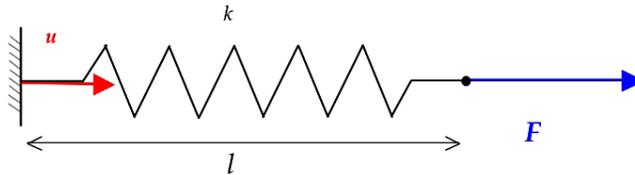
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \quad \text{où} \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad \text{est le vecteur quantité de mouvement}$$

- Principe des actions réciproques : si M_1 et M_2 sont deux points matériels en interaction, on a :

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$$

2.2 Expressions des forces

- Poids : $\vec{F} = m\vec{g}$ où \vec{g} est le champ de pesanteur (ou accélération de la pesanteur, à ne pas confondre avec le champ gravitationnel...).
- Force de rappel d'un ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0) \vec{u}$ où \vec{u} est dirigé dans le sens de l'élongation du ressort.



- Force de frottement fluide : $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ où λ est le coefficient de frottement.
- Force de frottement solide : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ où \vec{N} est normale au déplacement et \vec{T} tangente à celui-ci.
Lois de Coulomb du frottement solide :
Condition d'équilibre : $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$ avec f : coefficient statique de frottement solide.
Condition de glissement : $\|\vec{T}\| = f_c\|\vec{N}\|$ avec f_c : coefficient cinétique de frottement solide.
En pratique, $f \approx f_c$.
- Force électrique due à un champ électrique \vec{E} : $\vec{F} = q\vec{E}$ où q est la charge de la particule.
- Force magnétique due à un champ magnétique \vec{B} : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ où q et \vec{v} sont la charge et la vitesse de la particule.

2.3 Oscillateur

- Un système ayant pour équation du mouvement $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est un oscillateur harmonique.

$$\text{période : } T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \text{fréquence : } f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

- Un système ayant pour équation du mouvement $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est un oscillateur amorti si $\alpha > 0$ (amplifié si $\alpha < 0$). Il existe trois types de régimes différents :
 - si $\alpha > \omega_0$: régime apériodique $x = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$ où r_1 et r_2 = racines de l'équation caractéristique.
 - si $\alpha = \omega_0$: régime critique $x = (A + Bt)e^{-\alpha t}$
 - si $0 < \alpha < \omega_0$: régime pseudo périodique $x = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ où $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$
- Portrait de phase : c'est l'ensemble des trajectoires de phase $(x(t), \dot{x}/\omega_0)$ [ou $(x(t), \dot{x})$].

3 Travail, énergie

3.1 Théorèmes

- Travail élémentaire : $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$ Travail d'un point A à un point B : $W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$
- Théorème de l'énergie cinétique (réf. galiléen) : $\delta W = -dE_c$ Entre deux points A et B : $\Delta W = E_c(B) - E_c(A)$
- Energie potentielle : la force \vec{F} dérive de l'énergie potentielle E_p si $\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_p$, ou encore $\vec{F} = -\vec{grad} E_p$.
Une force est conservative si elle dérive d'une énergie potentielle ou si son travail est nul.

Si \vec{F} dérive d'une énergie potentielle E_p , son travail entre A et B est $W = E_p(A) - E_p(B)$.

- Théorème de l'énergie mécanique (référentiel galiléen) : on pose $E_m = E_c + E_p$. On a alors, en notant W_{nc} le travail des forces non conservatives (frottements) :

$$\delta E_m = \delta W_{nc} \quad \text{Entre deux points A et B : } \Delta E_m = W_{nc}$$

Si le système est conservatif, l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement : $E_m = cste$.

3.2 Stabilité d'un équilibre

- Problème à une dimension x :

Un point M se déplace sur un axe Ox et est soumis à une force conservative $\vec{F}(x)$ portée par Ox et dérivant de E_p .

x_0 est une position d'équilibre si l'on a :

$$\vec{F}(x_0) = \vec{0} \quad \text{ou} \quad \frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$$

- Stabilité : si l'on écarte légèrement le point de sa position d'équilibre :
 - si M revient à la position initiale, la position est stable (minimum de E_p) ;
 - si M s'écarte de la position initiale, l'équilibre est instable (maximum de E_p).
- Période des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable :

On développe la force à l'ordre 1 en $\epsilon = x - x_0$: $F(x_0 + \epsilon) \approx F(x_0) + \epsilon \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x_0} = -\epsilon \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_0}$

$$\text{D'où le PFD : } m\ddot{\epsilon} + \epsilon \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_0} = 0 \quad \text{soit} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m} \left[\left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x_0} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

- Problème à plusieurs dimensions :

Si M_0 est une position d'équilibre, on a pour une force conservative :

$$\vec{F} = -\vec{grad}_{M_0}(E_p) = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0$$

3.3 Exemples d'énergies potentielles

Energie potentielle élastique : $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

Energie potentielle de pesanteur : $E_p = +mgz$ (si l'axe Oz est orienté vers le haut)

Energie potentielle gravitationnelle de la masse m dans le champ créé par une masse M : $E_p = -\frac{GMm}{r}$

Energie potentielle électrostatique de la charge q dans le champ créé par une charge Q : $E_p = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}$

(toutes ces quantités sont définies à une constante près)

4 Référentiels non galiléens

4.1 Théorèmes

- Principe Fondamental de la Dynamique :

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

où $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ est la force d'inertie d'entraînement et $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$ est la force d'inertie de Coriolis (ou complémentaire).

- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ie} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ic}$$

4.2 Expression des forces d'inertie

- Référentiel en translation :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a} = -m \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} \quad \vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

- Référentiel en rotation :

$$\vec{F}_{ie} = m \left[-\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{HM} + \omega^2 \overrightarrow{HM} \right] \quad \vec{F}_{ic} = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

4.3 Energie potentielle des forces d'inertie

- La force d'inertie de Coriolis ne travaille jamais : $W_{ic} = 0$
- Energie potentielle de la force d'inertie d'entraînement dans le cas d'une rotation **uniforme** :

$$E_{Pie} = -\frac{1}{2} m \omega_e^2 r^2 + cste$$

4.4 Cas du référentiel terrestre

- Le référentiel terrestre lié au lieu géographique (Ox vers le sud, Oz vers le haut) est galiléen en première approximation (= référentiel du laboratoire).

- Champ de pesanteur : le champ de pesanteur terrestre \vec{g} prend en compte :

- l'attraction gravitationnelle de la Terre ;
- la force d'inertie d'entraînement liée à la rotation de la Terre sur elle-même (période = $J_S = 86\,164$ s).

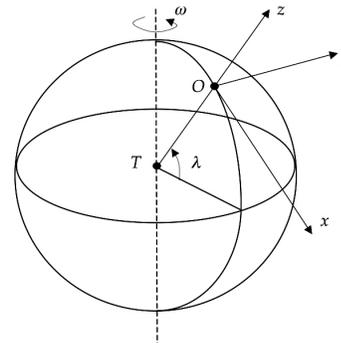


FIGURE 2 – Référentiel terrestre

Soit
$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{R_T^2} \vec{e}_z + \omega_T^2 \overrightarrow{HM} \quad (\text{pour une Terre supposée sphérique et homogène})$$

g varie de $9,77 \text{ m.s}^{-2}$ sur l'équateur à $9,83 \text{ m.s}^{-2}$ au pôle.

- Pour certaines applications, il faut prendre en compte la rotation de la Terre (déviation vers l'est, pendule de Foucault, ...). La force de Coriolis a alors des effets sensibles.
- Pour l'étude des marées océaniques, il faut tenir compte aussi du caractère non galiléen du référentiel géocentrique (termes de marée).

5 Systèmes de points

5.1 Éléments cinétiques

- Centre de gravité (ou centre de masse) : le point G défini par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum m_i}$$

Propriété du point G :
$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$$

- Résultante cinétique du système : $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$
- Moment cinétique du système : $\vec{\sigma}_o = \sum_i \vec{\sigma}_{oi} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_i$
- Pour deux points quelconques O et O' , on a la relation : $\vec{\sigma}'_o = \vec{\sigma}_o + \vec{p} \wedge \overrightarrow{OO'}$
- Energie cinétique du système : $E_c = \sum E_{ci} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

5.2 Référentiel barycentrique

- R^* est un référentiel attaché au système de points, en translation de vitesse \vec{v}_G par rapport au référentiel galiléen de référence.
- En pratique, on prend souvent l'origine au point G .
- En général, R^* n'est pas galiléen. Pour qu'il le soit, il faut que la translation soit rectiligne et uniforme (soit $\vec{v}_G = \overrightarrow{cté}$), c'est-à-dire que le système soit isolé.

5.3 Théorèmes de Kœnig

1^e théorème de Kœnig :

$$\vec{\sigma}_o = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{OG} \wedge m \vec{v}_G$$

2^e théorème de Kœnig :

$$E_c = E_C^* + \frac{1}{2} m v_G^2$$

Ces relations décomposent le mouvement du système de points en mouvement propre dans le référentiel barycentrique et mouvement du point G affecté de la masse totale du système.

5.4 Théorèmes généraux

- Résultante dynamique : $m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{ext}$
- Moment cinétique : $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_{ext}$
- Moment cinétique par rapport à un axe : $\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = M_\Delta$
- Energie cinétique : $dE_c = \delta W_{ext} + \delta W_{int}$

5.5 Problème à deux corps : mobile fictif

On considère un système de deux points matériels M_1 et M_2 en interaction. On se place dans le référentiel barycentrique, galiléen pour un système isolé.

Energie d'interaction : $U(r)$ telle que $\vec{F}_{2/1} = -g\vec{r}ad_{M_1} U(r)$ et $\vec{F}_{1/2} = -g\vec{r}ad_{M_2} U(r)$

Masse du mobile fictif = masse réduite du système : $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Position du mobile fictif : $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r}$

PFD vérifié par le mobile fictif : $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1/2}$

Une fois calculé \vec{r} , on revient aux points M_1 et M_2 par les homothéties : $\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$ et $\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$

6 Interactions newtoniennes

6.1 Energie potentielle effective

L'énergie mécanique s'écrit : $E_m = \frac{1}{2} \mu v^2 + U(r) = \frac{1}{2} \mu \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{K}{r}$

avec $C = r^2 \frac{d\theta}{dt}$ (constante des aires) $\rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$

On a donc

$$E_m = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p,eff}$$

où $E_{p,eff}$ est l'énergie potentielle effective :

$$E_{p,eff} = \frac{\mu C^2}{2r^2} - \frac{K}{r}$$

L'énergie potentielle effective permet de discuter la nature du mouvement :

- si $K > 0$ (interaction attractive, cas où $K = Gm_1 m_2$ ou $K = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$ avec $q_1 q_2 < 0$), la trajectoire peut être une branche d'hyperbole, une parabole (états de diffusion) ou une ellipse (état lié).

- si $K < 0$ (interaction répulsive, cas où $K = q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0)$ avec $q_1 q_2 > 0$), la trajectoire est toujours une branche d'hyperbole (état de diffusion).

6.2 Equation du mouvement

Interaction attractive : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ avec $p = \frac{\mu C^2}{K}$ paramètre de la conique et $e =$ excentricité

Interaction répulsive : $r = \frac{p}{e \cos \theta - 1}$ avec $p = -\frac{\mu C^2}{K}$ paramètre de la conique et $e =$ excentricité

Dans tous les cas, on peut écrire : $p = \frac{\mu C^2}{|K|}$

6.3 Energie mécanique

Interaction attractive : $E_m = \frac{K}{2p}(e^2 - 1)$ Interaction répulsive : $E_m = -\frac{K}{2p}(e^2 - 1)$

Dans tous les cas, on peut écrire : $E_m = \frac{|K|}{2p}(e^2 - 1)$

6.4 Mouvement des planètes

• Dans le cas du mouvement d'une planète autour du Soleil, ou d'un satellite artificiel autour de la Terre, on a $\mu \approx m$ (masse du corps le plus léger) et $p = mC^2/K = C^2/(GM)$ où M est la masse du corps central.

- Lois de Kepler :
 - les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers ;
 - les aires balayées pendant des durées égales sont égales ;
 - la période T et le demi-grand axe a de l'ellipse sont reliés par la relation :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

- Relations de l'ellipse

$$p = a(1 - e^2) \quad b^2 = a^2(1 - e^2) = ap \quad e = \frac{c}{a}$$

- Energie mécanique

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

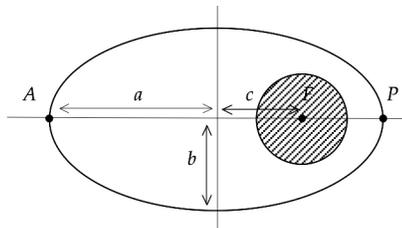


FIGURE 3 – Paramètres de l'ellipse

6.5 Mouvement des satellites artificiels

Première vitesse cosmique : vitesse sur l'orbite basse $r \approx R_T$: $v_1 = \sqrt{g_0 R_T} = 7,92 \text{ km.s}^{-1}$

Seconde vitesse cosmique : vitesse de libération de la Terre : $E_m = 0 \rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T} = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$

6.6 Cas d'un système binaire

Lorsque les masses des deux points sont voisines, la 3^e loi de Kepler devient :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

a est alors le demi grand-axe le l'ellipse décrite par *le mobile fictif*.

De manière plus générale, les résultats précédents s'appliquent en remplaçant m par la masse réduite μ et M par la somme des masses $m_1 + m_2$ (cas d'une étoile double, du système Terre-Lune, de la déflexion d'un astéroïde par un autre astéroïde, etc...). On a aussi $K = GMm = Gm_1 m_2$.



B. Compléments

1 Résolution d'un problème de mécanique

1.1 Méthode générale

Voici les différentes étapes de la résolution d'un problème de dynamique du point :

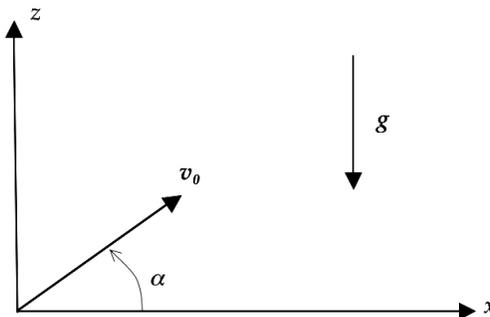
- 1) Définition précise du système étudié.
- 2) Choix d'un référentiel d'étude. On examine en particulier son caractère galiléen ou non.
- 3) Analyse de toutes les forces agissant sur le système choisi.
- 4) Choix d'un repère (à ne pas confondre avec le choix du référentiel). C'est en général la forme des forces en jeu, ou bien l'existence de symétries (cylindrique, sphérique...) qui dicte le choix du repère.
- 5) Ecriture du PFD : on obtient une équation différentielle vectorielle (en \vec{v}).
- 6) Projection du PFD sur les vecteurs (ou les axes) du repère choisi. On obtient ainsi 3 équations différentielles scalaires, que l'on sait en principe résoudre (humm...).
- 7) Résolution des équations différentielles. Une première intégration donne les composantes de \vec{v} , une seconde intégration donne celles du vecteur position \overrightarrow{OM} . Les constantes d'intégration sont déterminées grâce aux conditions initiales. On obtient finalement $x(t), y(t), z(t)$: ce sont les équations horaires du mouvement.

Si l'on est arrivé à cette dernière étape sans encombres, alors on peut commencer à faire de la physique...

1.2 Un exemple : la chute libre

On étudie le tir d'un projectile de masse m dans le vide (on néglige ici la résistance de l'air), avec une vitesse initiale \vec{v}_0 faisant un angle α avec l'horizontale.

- 1) Système étudié : le projectile de masse m , assimilé à un point matériel.
- 2) Référentiel choisi : le référentiel terrestre, que l'on supposera galiléen (pour l'instant...).
- 3) Forces agissant sur le point matériel : son poids $\vec{F} = m\vec{g}$. Et pis c'est tout...
- 4) Repère : pas de symétrie particulière, on prend donc un repère cartésien. On choisit l'origine O à la position de départ du projectile, et les axes tels que Oz corresponde à la verticale ascendante et tels que la vitesse initiale soit dans le plan (Oxz) .



5) PFD : $m\vec{a} = m\vec{g}$ soit $d\vec{v}/dt = \vec{g}$.

6) La projection du PFD sur les axes Ox , Oy et Oz donne :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

7) Il ne reste plus qu'à résoudre...

Première intégration :

$$\begin{cases} \dot{x} = cte \\ \dot{y} = cte \\ \dot{z} = -gt + cte \end{cases}$$

A $t = 0$, la vitesse vaut $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, 0, v_0 \sin \alpha)$. On en déduit les constantes d'intégration, d'où :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Deuxième intégration :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t + cte \\ y = cte \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + cte \end{cases}$$

A $t = 0$, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ d'où les constantes d'intégration. Finalement, les équations horaires sont :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

• Trajectoire : on peut éliminer t avec $t = x/(v_0 \cos \alpha)$. D'où l'équation de la trajectoire :

$$z = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha x \tag{1}$$

La trajectoire est une parabole contenue dans le plan (Oxz) .

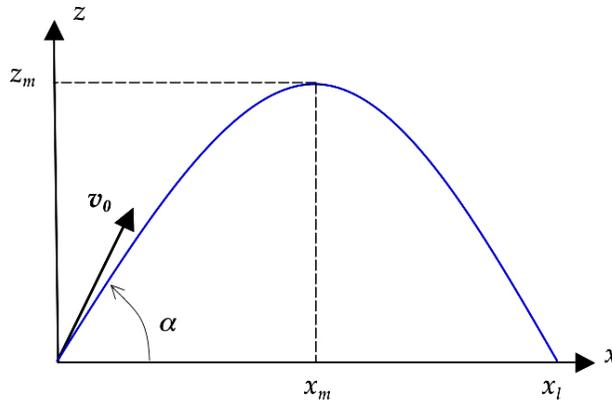


FIGURE 4 – Tir sans résistance de l'air : trajectoire

• Sommet de la trajectoire : on résout $dz/dx = 0$ d'où :

$$-\frac{gx}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha = 0 \quad \longrightarrow \quad x_m = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

On peut alors calculer l'altitude maximale atteinte en reportant x_m dans z . D'où :

$$z_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

• Portée : on résout $z = 0$ d'où ($x \neq 0$, cas correspondant à l'instant initial) :

$$x_l = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = 2x_m$$

1.3 Parabole de sûreté

Il s'agit de déterminer, pour un point quelconque (x, z) du plan (Oxz) , s'il peut être atteint par le projectile, la norme de la vitesse v_0 étant fixée mais pas sa direction α .

On raisonne pour cela sur α : il faut que pour x et z fixés, il existe une trajectoire possible, donc que l'équation (1) admette une solution en α . Mais il n'est pas facile de résoudre directement (1) en α , on effectue donc le changement de variable suivant :

$$u = \tan \alpha$$

L'intérêt, c'est qu'on peut exprimer facilement $1/\cos^2 \alpha$ en fonction de u . En effet, on a :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + u^2$$

L'équation (1) s'exprime alors de la façon suivante en fonction de u :

$$z = -\frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2} (1 + u^2) + ux$$

En réordonnant, on obtient une équation du second degré en u :

$$\frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2} u^2 - xu + \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2} + z = 0$$

Rappelons que l'on veut qu'il existe une solution en α donc en u . Pour cela, il faut que le discriminant soit positif ou nul. On calcule donc le discriminant Δ :

$$\Delta = x^2 - 4 \frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2} \left[\frac{1}{2} \frac{gx^2}{v_0^2} + z \right] \geq 0$$

En réordonnant (et en simplifiant par $x^2 \neq 0$), on obtient l'inégalité :

$$z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

La courbe $z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$ est une parabole. Elle est appelée "parabole de sûreté" car les points situés au-delà de celle-ci ne peuvent pas être atteints par le projectile. Les points situés sous la parabole, en revanche, peuvent être atteints de deux façons différentes, car il existe deux solutions en u donc en α (tir indirect ou tir tendu). Quant aux points situés sur la parabole, ils peuvent être atteints, mais seulement d'une seule façon (les deux solutions sont alors confondues). La parabole de sûreté est aussi l'enveloppe de toutes les trajectoires possibles lorsque l'on fait varier α , la vitesse v_0 étant fixée.

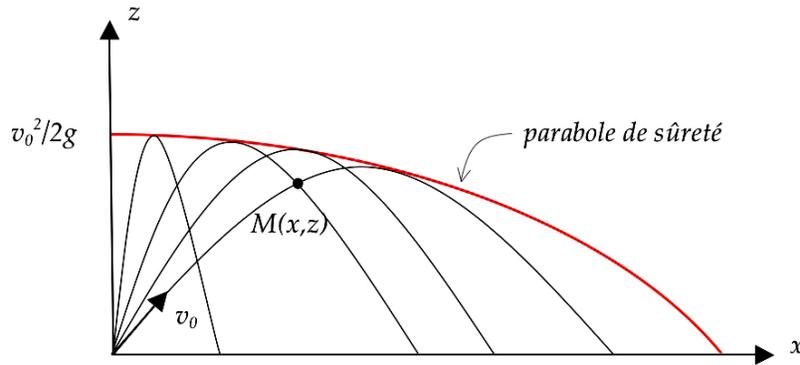


FIGURE 5 – Parabole de sûreté

1.4 Tir avec résistance de l'air

On reprend le problème précédent, mais on considère aussi maintenant la résistance de l'air, sous la forme d'une force de frottement fluide : $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$.

Les premières étapes de la mise en équation sont les mêmes que précédemment. Le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \lambda\vec{v}$$

En projection sur les axes du repère, avec $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$, on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -\lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -\lambda\dot{y} \\ m\ddot{z} &= -mg - \lambda\dot{z} \end{cases}$$

soit en posant $\tau = m/\lambda$ (constante de temps) :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x}/\tau &= 0 \\ \ddot{y} + \dot{y}/\tau &= 0 \\ \ddot{z} + \dot{z}/\tau &= -g \end{cases}$$

Il s'agit d'équations différentielles du premier ordre. En introduisant les constantes d'intégration A , B et C , les solutions s'écrivent (attention à la solution particulière en \dot{z}) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A \exp(-t/\tau) \\ \dot{y} &= B \exp(-t/\tau) \\ \dot{z} &= C \exp(-t/\tau) - \tau g \end{cases}$$

Pour déterminer les constantes d'intégration, on utilise les conditions initiales $\vec{v}_0 = (v_0 \cos \alpha, 0, v_0 \sin \alpha)$. D'où :

$$\begin{cases} \dot{x} &= v_0 \cos \alpha \exp(-t/\tau) \\ \dot{y} &= 0 \\ \dot{z} &= [v_0 \sin \alpha + \tau g] \exp(-t/\tau) - \tau g \end{cases}$$

Seconde intégration : on intègre une à une les expressions précédentes. La première donne par exemple, avec $\dot{x} = dx/dt$:

$$dx = v_0 \cos \alpha \exp(-t/\tau) dt \quad \longrightarrow \quad x = \int v_0 \cos \alpha \exp(-t/\tau) dt + cte = v_0 \cos \alpha \int \exp(-t/\tau) dt + cte$$

Soit :

$$x = -\tau v_0 \cos \alpha \exp(-t/\tau) + cte$$

Détermination de la constante :

ATTENTION!! On a $x(0) = 0$ mais cela ne veut PAS forcément dire que la constante est nulle... Il faut être très vigilant ici. En effet, $x(0) = 0$ donne :

$$0 = -\tau v_0 \cos \alpha + cte \quad \longrightarrow \quad cte = \tau v_0 \cos \alpha$$

Finalement, on obtient pour $x(t)$:

$$x = \tau v_0 \cos \alpha [1 - \exp(-t/\tau)]$$

L'intégration sur y est plus immédiate : $\dot{y} = 0$ entraîne $y = cte$ puis $y = 0$ (la trajectoire est donc là-encore contenue dans le plan (Oxz)).

Pour z en revanche, c'est un peu plus compliqué. On a :

$$dz = [(v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp(-t/\tau) - \tau g] dt \quad \longrightarrow \quad z = \int [(v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp(-t/\tau) - \tau g] dt + cte$$

Soit :

$$z = -\tau (v_0 \sin \alpha + \tau g) \exp(-t/\tau) - \tau g t + cte$$

Et avec $z(0) = 0$, on trouve finalement (attention, là non plus la constante n'est pas nulle!) :

$$z = \tau (v_0 \sin \alpha + \tau g) [1 - \exp(-t/\tau)] - \tau g t$$

L'allure de la trajectoire est donnée ci-dessous. Lorsque $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \tau v_0 \cos \alpha$. Il y a donc une asymptote verticale.

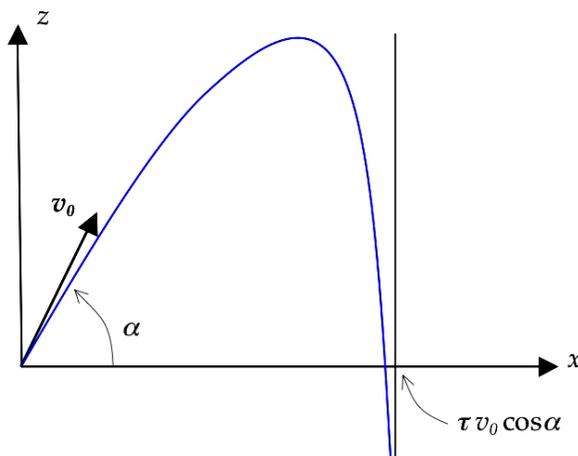


FIGURE 6 – Tir avec résistance de l'air : trajectoire

Portée : il n'est pas simple ici de résoudre $z(t) = 0$. En première approximation, on peut confondre x_l et l'asymptote. D'où :

$$x_l \approx \tau v_0 \cos \alpha$$

2 Le pendule de Foucault

2.1 Historique

C'est en remarquant que le plan d'oscillation d'une tige fixée à un mandrin en rotation gardait une direction fixe au cours du temps que Léon Foucault (1819-1868) eut l'idée d'utiliser un pendule pour mettre en évidence la rotation de la Terre.

Il réalise une première expérience concluante dans la cave de sa maison, rue d'Assas à Paris, en janvier 1851. Pour éviter les vibrations dues aux fiacres qui passent dans la rue, il opère tard dans la nuit. L'expérience est concluante : le plan d'oscillation du pendule dérive lentement au cours du temps. Arago, alors directeur de l'Observatoire de Paris, demande à Foucault de réaliser la même expérience avec un pendule de plus grande dimension dans la salle Cassini de l'Observatoire.

"Vous êtes invités à voir tourner la Terre, dans la salle méridienne de l'Observatoire de Paris, demain de 2 heures à 3 heures" proclame l'invitation envoyée à l'occasion de l'événement en février 1851. Un mois plus tard, l'expérience est réalisée au Panthéon et rencontre un vif succès. La "manie du pendule" se propage alors dans le monde entier : 39 pendules de Foucault sont par exemple installés aux Etats-Unis entre mai et juillet de la même année.

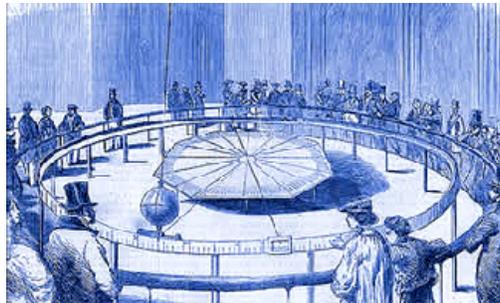


FIGURE 7 – L'expérience du pendule de Foucault au Panthéon

Il est à noter que la mise au point de l'expérience par Foucault est purement empirique. Cela est heureux : si Foucault avait eu connaissance des écrits théoriques du mathématicien et polytechnicien Denis Poisson, il n'aurait probablement jamais entrepris son expérience. Celui-ci avait en effet démontré qu'il était impossible de mettre en évidence la rotation de la terre à l'aide d'un pendule, les effets étant d'un ordre tout à fait négligeable...

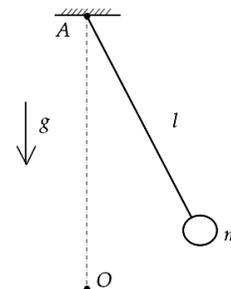
2.2 Etude théorique

Un point matériel M de masse m est suspendu par l'intermédiaire d'un fil sans masse de longueur l à un point fixe A par rapport au sol. On note O la position d'équilibre du pendule.

Les valeurs numériques sont celles de l'expérience historique du Panthéon : la longueur du fil est $l = 67$ m, la masse m vaut 28 kg et la latitude du lieu est $\lambda = 48^\circ 51'$ (on notera ω_T la vitesse angulaire de la Terre).

Le pendule est mis en mouvement. On considère des oscillations de faible amplitude, ce qui revient à supposer que le mouvement s'effectue dans le plan Oxy du référentiel terrestre.

C'est la force de Coriolis qui va être responsable de la dérive du pendule.



Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre appliqué à la masse m (rappelons que la force d'inertie d'entraînement est contenue dans le champ de pesanteur \vec{g}) :

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{T} - 2m \vec{\omega}_T \wedge \vec{v}$$

Soit $(Oxyz)$ le référentiel terrestre tel que O soit la position d'équilibre du pendule et Oz corresponde à la verticale du lieu. Posons $\vec{T} = T\vec{u}$ où \vec{u} est un vecteur unitaire, et déterminons les composantes de \vec{u} :

On a $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = \frac{\overrightarrow{M\dot{A}}}{l}$ avec $M(x, y, z)$ et $A(0, 0, l)$

D'où $\vec{u} = -\frac{x}{l}\vec{e}_x - \frac{y}{l}\vec{e}_y + \frac{l-z}{l}\vec{e}_z$ et $\vec{T} = T\vec{u}$

On obtient donc en projection sur les axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{x}{l}T + 2m\omega_T \sin \lambda \dot{y} \\ m\ddot{y} = -\frac{y}{l}T - 2m\omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg + \frac{l-z}{l}T + 2m\omega_T \cos \lambda \dot{y} \end{cases}$$

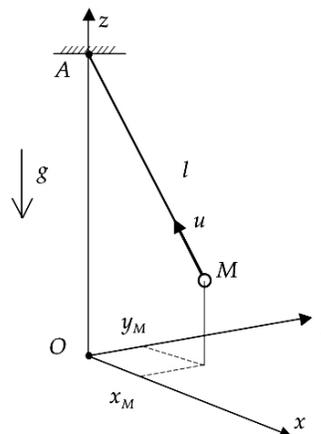


FIGURE 8 – Le repère terrestre utilisé pour l'étude du pendule de Foucault

Approximations : on va négliger les mouvements verticaux de la masse m , peu importants, par rapport à ses mouvements horizontaux.

On a donc $z \ll l$ soit $\frac{l-z}{l} \approx 1$; de plus $\ddot{z} \approx 0$ et enfin numériquement $2m\omega_T \cos \lambda \dot{y} \ll mg$

L'équation en z donne alors : $T \approx mg$ On posera dans la suite : $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ (pulsation propre du pendule)

D'où le système à résoudre :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\omega_T \sin \lambda \dot{y} = 0 & (1) \\ m\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\omega_T \sin \lambda \dot{x} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ce système couplé se prête bien à l'utilisation de la variable complexe $Z = x + jy$, $\dot{Z} = \dot{x} + j\dot{y}$, $\ddot{Z} = \ddot{x} + j\ddot{y}$. La combinaison linéaire (1)+j(2) conduit à l'équation différentielle en Z :

$\ddot{Z} + 2j\omega_T \sin \lambda \dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0$ Discriminant réduit : $\Delta = (j\omega_T \sin \lambda)^2 - \omega_0^2 = -\Omega^2 - \omega_0^2$ en posant $\Omega = \omega_T \sin \lambda$

Numériquement, $\Omega \ll \omega_0$, on peut donc écrire $\Delta \approx -\omega_0^2 \rightarrow \sqrt{\Delta} \approx \pm j\omega_0$

D'où les solutions de l'équation caractéristique : $r = -j\omega_T \sin \lambda \pm j\omega_0 = -j\Omega \pm j\omega_0$.

Finalement, la solution en Z s'écrit :

$Z = A \exp[(-j\Omega + j\omega_0)t] + B \exp[(-j\Omega - j\omega_0)t] = [A \exp(j\omega_0 t) + B \exp(-j\omega_0 t)] \exp(-j\Omega t)$
 $Z = C \cos(\omega_0 t + \phi) \exp(-j\Omega t)$ où A, B, C et ϕ sont des constantes d'intégration.

On revient ensuite à x et y :

$$\begin{cases} x = \text{Re}(Z) = C \cos(\omega_0 t + \phi) \cos(\Omega t) \\ y = \text{Im}(Z) = -C \cos(\omega_0 t + \phi) \sin(\Omega t) \end{cases}$$

On peut écrire, avec $C(t) = C \cos(\omega_0 t + \phi)$: $x = C(t) \cos(\Omega t)$ et $y = -C(t) \sin(\Omega t)$.

Dans le plan Oxy , la projection de M décrit donc un "cercle" de rayon $C(t)$ variable (oscillant à la pulsation ω_0 , période $T_0 = 16$ s) à la vitesse angulaire Ω .

→ le plan des oscillations du pendule tourne à la vitesse Ω , avec une période :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_T \sin \lambda}$$

- au pôle $T = 24$ h;
- à Paris $T = 31$ h 47 min;
- à l'équateur $T \rightarrow \infty$

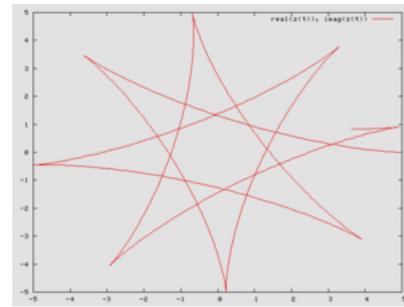


FIGURE 9 – Projection du mouvement du pendule sur le sol (rapport des périodes non respecté)

2.3 Le principe de Mach

Que montre le pendule de Foucault? Pour les contemporains de l'ingénieur français, la réponse à cette question ne fait aucun doute : le mouvement du plan d'oscillation du pendule met en évidence la rotation de la terre sur elle-même. Pourtant, à y réfléchir, le problème est un peu plus compliqué. Le plan du pendule semble fixe, en effet, mais par rapport à quoi? Par rapport au Soleil? Non. Si l'on attendait un mois ou deux, on se rendrait compte que le Soleil se déplace lentement par rapport au plan d'oscillation du pendule, ceci étant dû au fait que notre astre possède un mouvement propre dans la Galaxie (autrement dit, que le référentiel de Copernic n'est pas rigoureusement galiléen). Par rapport aux étoiles alors? Non plus, celles-ci ont aussi un mouvement propre, et en attendant encore plus longtemps, on montrerait que le plan d'oscillation n'est pas fixe par rapport aux étoiles.

Peut-être est-ce par rapport à l'ensemble de la Voie Lactée? Non, là encore, on décelerai un mouvement de celle-ci par rapport au plan d'oscillation en attendant quelques millions d'années. Il en serait de même si on prenait comme référence les galaxies les plus proches, puis celles de l'amas local, puis celles du superamas, etc. Et par rapport aux astres les plus lointains, comme les quasars ou les galaxies les plus éloignées?

Pour un partisan de la mécanique classique, le plan d'oscillation du pendule est tout simplement fixe par rapport à l'espace absolu, cet espace mathématique abstrait absolument fixe, que Newton assimilait à Dieu et que les théories de l'éther tentaient de matérialiser. Mais pour la physique moderne, l'espace absolu n'existe pas. C'est le physicien autrichien Ernst Mach qui en a formulé les critiques les plus pertinentes dans un ouvrage célèbre paru en 1883 : *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*.

Pour Mach, tous les mouvements sont relatifs, et les référentiels également. Si la Terre était seule dans l'univers, parler de rotation n'aurait aucun sens, et le plan du pendule de Foucault resterait alors immobile :

"Une rotation par rapport aux étoiles fixes fait naître dans un corps des forces d'éloignement de l'axe ; si la rotation n'est pas relative aux étoiles fixes, ces forces d'éloignement n'existent pas. Je ne m'oppose pas à ce qu'on donne à la première rotation le nom d'absolue pourvu que l'on n'oublie pas qu'elle n'est autre qu'une rotation relative par rapport aux étoiles fixes. Pouvons-nous fixer le vase d'eau de Newton, faire ensuite tourner le ciel des étoiles fixes, et prouver alors que ces forces d'éloignement sont absentes? Cette expérience est irréalisable, cette idée est dépourvue de sens, car les deux cas sont indiscernables l'un de l'autre dans la perception sensible. Je considère donc ces deux cas comme n'en formant qu'un seul et la distinction qu'en fait Newton comme illusoire" (p. 231).

Pour Mach, le plan d'oscillation du pendule doit donc être fixe par rapport aux astres les plus lointains. Mais ceci implique une chose extraordinaire : le pendule de Foucault, dans toute la simplicité de son dispositif, s'oriente instantanément en rapport à des masses situées aux confins de l'univers!



FIGURE 10 – Ernst Mach (1838-1916)

Mach en tire une conclusion radicale : ce sont donc ces masses éloignées qui sont responsables des forces d'inertie (rappelons que leur origine reste un mystère dans le cadre de la mécanique classique). Si j'ai du mal à déplacer une voiture en la poussant, par exemple, c'est à cause de son inertie, sa masse inertielle (à distinguer de la masse gravitationnelle). Pour Mach, celle-ci est due à une interaction avec des galaxies situées aux limites de l'univers...

Cette idée féconde, et toujours d'actualité, d'une interaction entre les mouvements locaux et l'ensemble de l'univers a été appelée, à la suite d'Einstein, "Principe de Mach".

3 Les Référentiels en Astronomie

Les observations astronomiques sont cruciales pour la réalisation d'un référentiel galiléen. Celui-ci revêt non seulement un intérêt théorique pour la mécanique mais aussi un intérêt pratique (guidage des satellites et des sondes interplanétaires) et spéculatif (test du principe de Mach).

3.1 Comment construire un référentiel galiléen ?

Les astronomes ont créé un système de référence international appelé ICRS (International Celestial Reference System). Celui-ci représente la meilleure réalisation pratique d'un référentiel galiléen (référentiel de Copernic). Son origine est située au barycentre du système solaire, et ses axes sont orientés vers des astres fixes.

Mais qu'appelle-t-on "astres fixes"? Les étoiles de notre galaxie (la Voie Lactée) sont toutes mobiles (le Soleil par exemple se déplace à 70 km.s^{-1} par rapport à l'environnement galactique, entraînant avec lui tout le système solaire). Les autres galaxies se déplacent également, et ce d'autant plus rapidement qu'elles sont éloignées de la Terre (c'est le mouvement de récession des galaxies dû à l'expansion de l'univers).

En pratique, il s'agit donc de définir des objets célestes dont la position est connue avec une très grande précision et dont les mouvements propres sur la voûte céleste sont négligeables. Les meilleurs candidats sont les quasars (ou "radiosources extragalactiques"). Il s'agit de noyaux de galaxies très lointains et très actifs, en particulier dans le domaine radio.

Ainsi, les quasars sont supposés suffisamment lointains pour être vus sous un angle constant. Autre avantage : ils émettent dans le domaine radio, ce qui permet des observations très précises à l'aide d'antennes disposées tout autour de la Terre, en utilisant la technique VLBI (Very Long Base Interferometry), qui est une technique d'interférence radio.

Il s'agit de mesurer les instants de réception de signaux radio issus d'un même quasar sur deux antennes distantes de plusieurs milliers de kilomètres (plus la longueur de la "base" est importante, meilleure est la précision des mesures). La comparaison des dates de réception nécessite l'emploi d'horloges extrêmement précises (horloges atomiques à jet de Césium).

Une objection vient cependant naturellement à l'esprit : si le Soleil (et le système solaire avec lui) tourne autour du centre galactique, comment un référentiel fondé sur le barycentre de ce système peut-il être galiléen ? Il s'agit en fait d'une approximation, mais on a évalué l'accélération correspondante : elle est de l'ordre de $10^{-12} \text{ m.s}^{-2}$ et se trouve à l'origine de forces d'inertie tout à fait insignifiantes. On pourrait bien sûr prendre le centre de la Galaxie



FIGURE 11 – Le quasar J1148+5251 (à gauche, le point jaune au centre de l'image) et antenne VLBI de Wettzell (à droite, Allemagne)

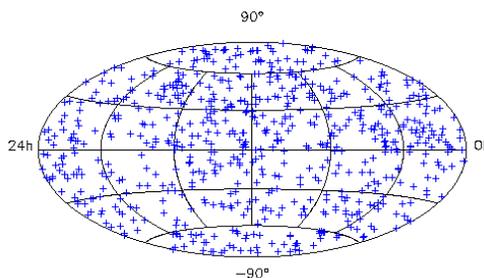


FIGURE 12 – Répartition des sources extragalactiques de l'ICRS

comme origine, mais la position de celui-ci est mal connue. A quoi servirait un référentiel dont on ne connaîtrait pas précisément la position ? On se contente donc du Référentiel de Copernic, dont la précision est largement suffisante pour tous les besoins spatiaux actuels.

3.2 Réalisation pratique

La réalisation pratique du référentiel ICRS est un catalogue contenant les positions des astres de référence, qui doivent être actualisées en permanence :

- Coordonnées équatoriales de 608 sources extragalactiques (quasars), uniformément réparties sur la sphère céleste ;

• Bien que très faibles, les mouvements propres apparents spatiales de certaines de ces sources ne sont pas nuls : il convient donc de les observer dans le temps et de déterminer la dérive annuelle de leurs positions, toujours avec la technique VLBI. La figure ?? donne par exemple les positions successives de la source 0229+131 entre 1984 et 2002. L'amplitude du déplacement atteint 4 mas, soit 4 millisecondes de degré d'arc. D'autres corrections doivent être apportées dans le cas où les quasars observés ne sont pas rigoureusement ponctuels. Leur extension spatiale est alors précisée par de nouvelles observations.

3.3 Le référentiel dynamique

Le référentiel dynamique est l'extension de l'ICRS au système solaire. Il tire son nom de l'étude dynamique des corps du système solaire (planètes, satellites, astéroïdes...), à partir de la résolution des équations de leur mouvement. On obtient ainsi des *éphémérides*, dont on confronte en permanence les données aux observations pour affiner la détermination des différents paramètres (masses des planètes, paramètres des ellipses, position de l'écliptique, ...).

Ces éphémérides sont utilisées pour la prédiction des phénomènes astronomiques et la préparation des missions

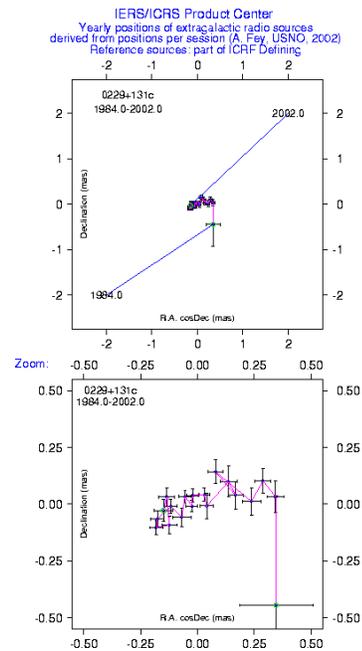


FIGURE 13 – Mouvement propre du quasar 0229+131c

Le raccordement du référentiel dynamique à l'ICRS met en œuvre différentes techniques :

- observations d'étoiles de référence simultanément aux astres du système solaire (occultations par exemple) ;
- observations de satellites artificiels par VLBI ;
- observations des astéroïdes (dont l'intérêt est d'être quasiment ponctuels) ;
- tirs laser sur la Lune.

3.4 Le Laser-Lune

Les télémétrie par laser sur la Lune a débuté dans les années 1960, à l'époque des missions lunaires. La précision des mesures n'a cessé d'augmenter depuis : les tirs laser-Lune réalisés à l'Observatoire de la Côte d'Azur (Cerga) depuis 1985 permettent la détermination de la distance Terre-Lune avec une très grande précision (de l'ordre de 6 mm). Mais ils permettent également de bien connaître les paramètres du système Terre-Lune et, à cause des perturbations du Soleil sur celui-ci, de déterminer d'autres paramètres fondamentaux du système solaire.



FIGURE 14 – Laser en parallèle avec un télescope

Il est important pour cela d'avoir de très nombreuses données (les systèmes à résoudre peuvent atteindre des millions d'équations!) et donc nécessaire d'effectuer des campagnes de tirs nombreuses et régulières. La réflexion des tirs laser, très brefs, se fait sur des réflecteurs catadioptriques déposés à la surface la Lune par des missions soviétiques ou américaines (voir figure). La mesure très précise du temps aller-retour de l'impulsion laser permet de connaître la distance de la cible. Du fait de la diffraction (la tache du laser sur la Lune a un diamètre d'une dizaine de kilomètres), le taux de photons réfléchis reçus est très faible : 1 sur 10^{20} environ (soit *un* photon tous les 100 tirs)!

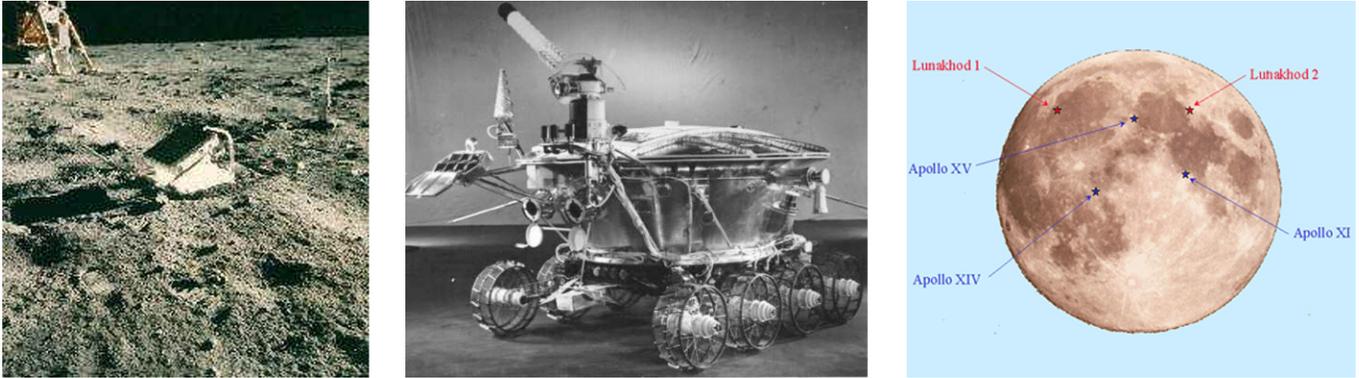


FIGURE 15 – Réflecteurs Apollo sur le sol lunaire, sur une sonde Lunakhod soviétique, et carte des différents sites.

Des tirs laser sur satellites artificiels (Lageos) permettent de la même façon l'étude du champ gravitationnel terrestre.